



TITLE:

Survey in harmonic mappings(Study of Riemannian geometry by analytic method)

AUTHOR(S):

浦川, 肇

CITATION:

浦川, 肇. Survey in harmonic mappings(Study of Riemannian geometry by analytic method). 数理解析研究所講究録 1986, 600: 52-116

ISSUE DATE:

1986-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99603>

RIGHT:

Survey in harmonic mappings

浦川 肇

昭和 61 年 3 月 25 日 ~ 28 日

於 京都大学数理解析研究所

(浦川-harmonic map)

目次

Chapter 1	The first and the second variation formulas for the energy	
§ 1	Definition of harmonic maps and their examples	... 1
§ 2	The second variation formula	... 6
§ 3	Definition of the index, nullity and stability	... 7
§ 4	The eigenvalue problem of harmonic maps	... 9
Chapter 2	Generic properties of the index and nullity	
§ 1	Morse theory for a geodesic and Morse-Schoenberg's comparison theorem	... 14
§ 2	Morse theory for a harmonic map	... 18
§ 3	The heat equation method due to Berard and Gallot and its application	... 20
Chapter 3	Stability of several harmonic maps	
§ 1	Weak stability about holomorphic maps	... 31
§ 2	Weak stability about Einstein manifolds	... 42
Chapter 4	Constructions and classification problems of harmonic mappings	
§ 1	Eigenmaps into spheres	... 47
§ 2	Non-linear σ -models	... 52
i)	Calabi constructions	$S^2 \rightarrow S^n$
ii)	Twistor constructions	$S^2 \rightarrow P^n(\mathbb{C})$
iii)	Chiral fields	$S^2 \rightarrow U(n)$
BIBLIOGRAPHY		... 59

Chapter 1 The first and the second variation formulas for the energy

▼この章では、harmonic map の定義や基本的な事柄に付いて説明した後に、harmonic map を spectrum で特徴づけることに関し考察する。

§1 Definition of harmonic maps and their examples

▼幾何学の多くの問題は、変分問題として、formulate される。そこで使われる変分法とは、

- (i) ある空間 X 上の functional E を考える
- (ii) E の X 上における critical points を調べる
- (iii) E の critical points における Hessian を調べる

から成り立っている。

例えば、Morse theory では、変分法を用いて多様体の大域的性質を調べている。

例 (測地線の場合)

(N, h) : Riemannian manifold

$p, q \in N$ として

$$\begin{aligned} X &:= \{p \text{ と } q \text{ を結ぶ smooth な path 全体}\} \\ &= \{\phi : [0, 2\pi] \rightarrow M \text{ smooth, } \phi(0) = p, \phi(2\pi) = q\} \end{aligned}$$

と置く。 $\phi \in X$ に対し、 E : energy を

$$E(\phi) := \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h\left(\frac{d\phi}{dt}, \frac{d\phi}{dt}\right) dt$$

と置く。このとき、 E の critical point が p と q を結ぶ constant speed の測地線である。

(浦川-harmonic map)

(以下このノートでは、特に断わらないかぎり、測地線はすべて constant speed とする。)

▼一般に

$(M, g), (N, h)$: Riemannian manifolds

$X := C^\infty(M, N) = \{\phi : M \rightarrow N \text{ smooth}\}$

として、 $\phi \in X$ に対し、 ϕ の energy $E(\phi)$ を以下の式で定義する。

$$E(\phi) := \int_M e(\phi) dv_g$$

但し、

$$e(\phi)(x) := \frac{1}{2} \text{ (Hilbert-Schmit norm of } d\phi \text{ at } x)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m h(d\phi(e_i), d\phi(e_i))$$

$\{e_i\}_{i=1}^m$: local orthonormal frame of (M, g)

$m = \dim M$

(以下特に断わらない限り、 $m = \dim M$ とする。)

とする。

定義

$\phi \in C^\infty(M, N)$ が harmonic map であるとは

$\forall \phi_t : \phi_0 = \phi$ なる variation で compact support を持つもの
に対し

(浦川-harmonic map)

$$\frac{d}{dt} E(\phi_t) \big|_{t=0} = 0$$

であることと定義する。

▼Energy functional の first variation formula は

$$\frac{d}{dt} E(\phi_t) \big|_{t=0} = - \int_M h(\tau(\phi), V) dV_g$$

で与えられる。(cf. [E.L2] Proposition (2.4)) 但し、

$$\tau(\phi) := \sum_{i=1}^m \{ \tilde{\nabla}_{e_i} e_i - \phi({}^N \nabla_{e_i} e_i) \}$$

${}^M \nabla$: the Levi-Civita connection on (M, g)

${}^N \nabla$: the Levi-Civita connection on (N, h)

$\tilde{\nabla} :=$ the connection on $\Gamma(\phi^{-1}TN)$ induced from ${}^N \nabla$

i.e. the unique connection on $\Gamma(\phi^{-1}TN)$

such that,

for $\forall x \in M, \forall X \in T_x M, \forall W \in \Gamma(TN)$

$$\tilde{\nabla}_X (W \circ \phi) = {}^N \nabla_{\phi_* X} W$$

$\{e_i\}_{i=1}^m$: local orthonormal frame of (M, g)

$$V(x) := \frac{d}{dt} \phi_t(x) \big|_{t=0} : \text{variation vector field}$$

along ϕ

である。よって、次が成り立つ。

(浦川-harmonic map)

“ ϕ が harmonic map である $\Leftrightarrow \tau(\phi) = 0$ ”

▼ $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ smooth が harmonic map になる場合には次のような例がある。

Example 0 任意の定値写像 $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ は harmonic map である。

Example 1 $\dim M = 1$ の場合

このとき M は S^1 または \mathbb{R} の open set に standard metric をいれたものに、isometric である。定義から容易に次のことが分かる。

$$\phi : \text{harmonic map} \Leftrightarrow \phi : \text{geodesic}$$

Example 2 $(N, h) = (\mathbb{R}, \text{standard metric})$ のとき

$$\phi : \text{harmonic map} \Leftrightarrow \phi : \text{harmonic function}$$

Example 3 $\phi : \text{isometric minimal immersion} \Rightarrow \phi : \text{harmonic map}$

(cf. [E.L2] Theorem (2.25))

Example 4 $\phi : \text{Riemannian submersion}$ の場合

(Riemannian submersion については、O'Neill の論文 [N] を見よ)

O'Neill の結果を用いれば、次のことは簡単な計算で導かれる。

$$\begin{aligned} \phi : \text{harmonic map} \Leftrightarrow \phi^{-1}(\phi(x)) : \text{minimal submanifold of } M \\ \text{for } \forall x \in M \end{aligned}$$

Example 5 $\phi : \text{holomorphic map between compact Kaehler manifolds}$

$$\Rightarrow \phi : \text{harmonic}$$

(cf. [E.L2] Corollary (8.17))

(浦川-harmonic map)

▼ Examples 0 ~ 2 は、定義からすぐ分かる。

▼ 物理に出てくる σ -model や chiral fields は、主に $\dim M = 2$ の場合の harmonic map のことである。

▼ harmonic map の問題を幾つか挙げてみよう。

(1) いつ smooth homotopy class に harmonic map が存在するか。

(2) Riemann 多様体 $(M, g), (N, h)$ に対して、集合

$$\{\phi : (M, g) \rightarrow (N, h) \text{ harmonic}\}$$

の構造を決定せよ。

(3) ある map の集合を考えたときに、energy functional を minimize する harmonic map が存在するか、また存在するとき、どの harmonic map が energy functional を minimize するのか。与えられた harmonic map の近傍で energy functional はいかに振舞うか。

(4) energy functional の値分布

$$\{E(\phi) \mid \phi : (M, g) \rightarrow (N, h) \text{ harmonic}\} \subset [0, \infty)$$

を調べよ。(cf. [A.S])

(5) 数学の他の分野 (Plateau 問題など) や物理への応用 (Superstring theory など。このノートで物理に関係があるのは、主に Chapter 4 §2 の部分である。)

▼ このノートでは、(2)、(3) の問題を中心に考える。

(浦川-harmonic map)

§ 2 The second variation formula

▼ $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ harmonic

ϕ_t : variation of ϕ with compact support and with $\phi_0 = \phi$

に対し、Energy の第2変分は次の式で与えられる。

(cf. [E.L2] Proposition (4.3))

$$\frac{d^2}{dt^2} E(\phi_t) \big|_{t=0} = \int_M h(J_\phi V, V) dv_\phi$$

但し、

$V \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$: variation vector field

$$V(x) = \frac{d}{dt} \phi_t(x) \big|_{t=0}$$

$J_\phi : \Gamma(\phi^{-1}TN) \rightarrow \Gamma(\phi^{-1}TN)$ Jacobi operator

$$J_\phi V := \bar{\Delta}_\phi V - RV$$

$$\bar{\Delta}_\phi V := - \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}) V$$

: the rough Laplacian

$\{e_i\}_{i=1}^m$: local orthonormal frame of (M, g)

$$RV := \sum_{i=1}^m {}^N R(\phi_* e_i, V) \phi_* e_i$$

とする。

注意

ここで曲率テンソルは

$$R(X, Y)Z = - [\nabla_X, \nabla_Y]Z + \nabla_{[X, Y]}Z$$

で定義する。この定義は、[E.L2] (1.10) にあわせてある。小林-野水の本の

定義 (cf. [K.N] p133) とは符号が逆である。

§ 3 Definition of the index, nullity and stability

▼この§では、harmonic map に対して、2つの場合に分けて、上の題にある index, nullity, stability を定義する。

定義

Case(i) M : closed manifold のとき

以下の固有値問題を考える。

$$J_\phi V = \lambda V \quad V \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$$

J_ϕ が elliptic operator であることと、 M が compact であることより、この固有値問題は discrete spectrum を持ち、各固有値は、有限の重複度を持つ。

よって、固有値を小さいものから、重複度を込めて並べたものを

$$\begin{aligned} \text{Spec}(J_\phi) &= \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots\} \\ &\quad (\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots) \end{aligned}$$

として、

$\text{Ind}(\phi) :=$ 負の固有値達の重複度の和

$\text{Null}(\phi) := \dim \ker(J_\phi)$

とおく。

このとき

ϕ が stable $\Leftrightarrow \text{Ind}_\Omega(\phi) = \text{Null}_\Omega(\phi) = 0$

ϕ が weakly stable $\Leftrightarrow \text{Ind}(\phi) = 0$

ϕ が unstable $\Leftrightarrow \phi$ が weakly stable でない

と定義する。(このノートでは、主に weakly stable, unstable の場合を考察していく)

(浦川-harmonic map)

Case(ii) $\Omega \subset M$: bounded set

この場合は、次の固有値問題を考える。

$$\begin{aligned} J_\phi V &= \lambda V & \text{in } \Omega \\ V &= 0 & \text{on } \partial \Omega \end{aligned}$$

これも、discrete spectrum を持つ。よって Case(i) と同様にして

$\text{Ind}_\Omega(\phi) :=$ 負の固有値の重複度の和

$\text{Null}_\Omega(\phi) := \dim \ker(J_\phi)$

とおく。更に

ϕ が stable on Ω $\Leftrightarrow \text{Ind}_\Omega(\phi) = \text{Null}_\Omega(\phi) = 0$

ϕ が weakly stable on Ω $\Leftrightarrow \text{Ind}_\Omega(\phi) = 0$

ϕ が unstable on Ω $\Leftrightarrow \phi$ が weakly stable on Ω でない

と定義する。

例

(N, h) が nonpositive sectional curvature を持てば

$$\forall \phi : (M, g) \rightarrow (N, h) : \text{harmonic}$$

は、weakly stable である。

それは、 J_ϕ の形から、 J_ϕ の固有値は全て非負になることから分かる。

また、このとき他に ϕ と homotopic な harmonic map があれば、それと ϕ は energy が一定の geodesic homotopy で結べてしまうことが知られている。

(negative sectional curvature のときには、もうすこし強いことがいえる。

cf. [Ht])

(浦川-harmonic map)

§ 4 The eigenvalue problem of harmonic maps

▼この § では次の 2 つの問題を考える。その問題は、harmonic map は、 $\text{Spec}(J_\phi)$ でどの程度特徴づけられるかというものである。

問題 A

2 つの harmonic maps

$$\phi_1 : (M_1, g_1) \rightarrow (N_1, h_1)$$

$$\phi_2 : (M_2, g_2) \rightarrow (N_2, h_2)$$

$$M_i : \text{compact } (i=1,2)$$

を考える。今

$$\text{Spec}(J_1) = \text{Spec}(J_2)$$

$$J_i : \text{Jacobi operator of } \phi_i$$

とする。このとき、

$$\Phi_1 : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2) \quad \text{isometry}$$

$$\Phi_2 : (N_1, g_1) \rightarrow (N_2, g_2) \quad \text{isometry}$$

が存在して、次の図式を可換にするか？

$$\phi_1 : (M_1, g_1) \rightarrow (N_1, h_1)$$

$$\Phi_1 \downarrow$$

$$\Phi_2 \downarrow$$

$$\phi_2 : (M_2, g_2) \rightarrow (N_2, h_2)$$

(浦川-harmonic map)

問題 B

§1 の Examples 0 ~ 5 の typical な harmonic map を $\text{Spec}(J_\phi)$ で特徴づけよ。

▼しかし、一般的には問題 A に述べたことは成立しない。それは次の例より分かる。

例

$$\begin{aligned} \phi : (M, g) &\rightarrow (N, h) : \text{harmonic} \\ (N, h) &: \text{flat torus} \end{aligned}$$

とする。各点で 1 次独立な $n (= \dim N)$ 個の平行な N 上のベクトル場 $\{X_i\}_{i=1}^n$ をとる。

$\forall V \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$ は $f_i \in C^\infty(M)$ によって

$$V = \sum_{i=1}^n f_i \cdot X_i^-$$

と表せる。但し $X_i^- \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$ を、

$$X_i^-(x) = X_i(\phi(x))$$

と置いた。すると、

$$J_\phi V = \sum_{i=1}^n (\Delta_M f_i) X_i^-$$

Δ_M : Laplace-Beltrami operator on (M, g)

であるから、 M :compact とすると

$$\text{Spec}(J_\phi) = n \times \text{Spec}(\Delta_M)$$

(浦川-harmonic map)

即ち

$$\text{Spec}(\Delta_M) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots\}$$

$$(\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_i \dots)$$

とすると

$$\text{Spec}(J_\phi) = \{\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots\}$$

各 λ_i は n 個ずつ並ぶ

となる。よって、 (N, h) : flat torus の場合 $\text{Spec}(J_\phi)$ は $n = \dim N$ だけで決まってしまう。flat torus は、次元が同じでも、isometric とは限らないので、これが問題 A に述べてあることが成立しない例を与える。

▼ § 1 の Example 0 の場合には、問題 B に関し、次のような事が分かっている。

命題 ([U3])

$$\phi_1, \phi_2 : (M, g) \rightarrow (N, h) : \text{harmonic}$$

$$\text{Spec}(J_1) = \text{Spec}(J_2)$$

J_i : Jacobi operator of ϕ_i

とせよ。このとき、以下の式が成り立つ。

$$\int_M \text{Tr}_g(\phi_1^*({}^N \rho)) dv_g = \int_M \text{Tr}_g(\phi_2^*({}^N \rho)) dv_g$$

${}^N \rho$: Ricci curvature tensor of N

(浦川-harmonic map)

▼この命題より

(N, h) : Einstein with non-zero Einstein constant

$$\Rightarrow E(\phi_1) = E(\phi_2)$$

が分かる。特に、 ϕ_1 が定値写像であれば、 ϕ_2 も定値写像である。

すなわち、 (N, h) : Einstein with non-zero Einstein constant の場合には、 ϕ が定値写像であることは、 $\text{Spec}(J_\phi)$ で特徴づけられる。

ϕ が定値写像であるときには、

$$\text{Spec}(J_\phi) = n \times \text{Spec}(\Delta_n)$$

となっている。(これは、 J_ϕ が $\Gamma(M, R^n) \cong \Gamma(\phi^{-1}TN)$ 上の普通の Laplacian になっているからである。)

▼他にも、問題Bに関して、次のような事が知られている。

命題 ([U3])

$\phi_1, \phi_2: (M, g) \rightarrow (S^n(1), \text{standard metric})$ harmonic

Scalar curvature of $M \equiv \text{constant}$

$$\text{Spec}(J_1) = \text{Spec}(J_2)$$

J : Jacobi operator of ϕ

とせよ。このとき、 ϕ_1 が isometric minimal immersion であれば、 ϕ_2 も isometric minimal immersion である。

命題 ([U3])

$$\phi_1, \phi_2 : (M, g) \rightarrow (P^n(\mathbb{C}), \text{Fubini-Study metric})$$

Scalar curvature of $M \equiv \text{constant}$

$$\text{Spec}(J_1) = \text{Spec}(J_2)$$

J_i : Jacobi operator of ϕ_i

とせよ。このとき ϕ_1 が holomorphic isometric minimal immersion であれば、 ϕ_2 も holomorphic isometric minimal immersion である。

▼最後に問題を1つ出しておく。

問題 C

Hopf fibration

$$\phi : (S^{2n+1}(1), \text{standard metric}) \rightarrow (P^n(\mathbb{C}), \text{Fubini-Study metric})$$

を $\text{Spec}(J_\phi)$ で特徴づけよ。

Chapter 2 Generic properties of the index and nullity

▼この章でやりたい事は測地線に対する Morse 理論が一般の調和写像でどこまで成立するかを検討する事である。そこで、先ず §1 で簡単に測地線の場合の復習をし、§2 で一般の調和写像に対し問題設定をして、§3 でその問題を考察する。

§1 Morse theory for a geodesic and Morse-Schoenberg's comparison theorem

▼Morse index theorem を述べるために次の定義をする。
(Morse index theorem については、[Mi] を見よ)

定義

$$\begin{aligned}\phi : I = [0, 2\pi] &\rightarrow (N, h) \text{ geodesic} \\ t &\in (0, 2\pi)\end{aligned}$$

に対し、

$$\begin{aligned}\phi(t) \text{ が } &\text{conjugate point for } p = \phi(0) \text{ である} \\ \Leftrightarrow &\exists V \neq 0 : \text{a vector field along } \phi \\ &\text{such that } J_\phi V = 0 \quad \text{on } (0, 2\pi) \\ &V(0) = 0 \quad V(t) = 0\end{aligned}$$

と定義する。更に $\phi(t)$:conjugate point for $p = \phi(0)$ に対し

$$\begin{aligned}\phi(t) \text{ の重複度 (multiplicity)} \\ &:= \dim \{V \mid \text{vector field along } \phi \\ &\quad \text{such that } J_\phi V = 0 \quad \text{on } (0, 2\pi) \\ &\quad V(0) = 0 \quad V(t) = 0\}\end{aligned}$$

(浦川-harmonic map)

とおく。

▼上の定義のもと Morse index theorem は次のようになる。

Morse index theorem

$$\phi : I = [0, 2\pi] \rightarrow (N, h) \quad \text{geodesic}$$

に対し

$$\text{Ind}_1(\phi) = \text{開区間 } (0, 2\pi) \text{ の conjugate point の数の重複度を込めた和}$$

となる。ここで $\text{Ind}_1(\phi)$ は $\phi : \text{harmonic map}$ としてのものである。
(see Chapter 1 § 3 Case(ii))

▼上の定理を用いると次の定理が出る。

Comparison theorem of Morse-Schoenberg ([G.K.M])

$(N, h) : \text{Riemannian manifold}$

$${}^N K \leq a$$

$$\phi : I = [0, 2\pi] \rightarrow (N, h) \quad \text{geodesic}$$

とせよ。このとき

$$\text{Ind}_1(\phi) + \text{Null}_1(\phi) \leq (n - 1) [L(\phi) \sqrt{a} / \pi]$$

となる。但し

(浦川-harmonic map)

${}^N K: (N, h)$ の断面曲率

$[]$: Gauss 記号

$L(\phi) := \phi$ の長さ

とした。

▼この定理は、ここでは証明しないが、次の2つの事から導かれる。

Comparison theorem

$S^n(1/\sqrt{a})$: 半径 $1/\sqrt{a}$ の球 $\subset \mathbb{R}^{n+1}$

(これは 断面曲率 $\equiv a$ をもつ。)

(N, h) : Riemannian manifold

$\phi: I = [0, 2\pi] \rightarrow (N, h)$ geodesic

$\phi^-: I = [0, 2\pi] \rightarrow S^n(1/\sqrt{a})$ geodesic

とする。このとき

$$\text{Ind}_1(\phi) + \text{Null}_1(\phi) \leq \text{Ind}_1(\phi^-) + \text{Null}_1(\phi^-)$$

$S^n(1/\sqrt{a})$ の場合

$\forall \phi^-: I \rightarrow S^n(1/\sqrt{a})$ geodesic

に対し、

$$\text{Ind}_1(\phi^-) + \text{Null}_1(\phi^-) = (n-1)[L(\phi)\sqrt{a}/\pi]$$

と評価される。

(浦川-harmonic map)

▼ $S^0(1/\sqrt{a})$ の場合をより詳しく述べると、

$$L(\phi) < \pi / \sqrt{a} \Rightarrow \text{Ind}_1(\phi^-) = \text{Null}_1(\phi^-) = 0$$

$$L(\phi) = \pi / \sqrt{a} \Rightarrow \text{Ind}_1(\phi^-) = 0, \text{Null}_1(\phi^-) = n - 1$$

$$\pi / \sqrt{a} < L(\phi) < 2\pi / \sqrt{a}$$

$$\Rightarrow \text{Ind}_1(\phi^-) = n - 1, \text{Null}_1(\phi^-) = n - 1$$

.....

となっている。

§ 2 Morse theory for a harmonic map

▼ § 1 に述べたことをまとめると、測地線に関し、次のことが分かる。

(i) もし ϕ : geodesic の長さが π/\sqrt{a} より小さければ、

$$\text{Ind}_I(\phi) = \text{Null}_I(\phi) = 0$$

即ち、 ϕ は I 上 stable である。

(ii) もし ϕ : geodesic の長さが十分大きければ、 $\text{Ind}_I(\phi)$ 、 $\text{Null}_I(\phi)$ は、 (N, h) の断面曲率の上限と ϕ の長さで評価される。

▼ これらと同様のことが、一般の harmonic map に対しても成立するか？ という問題を考えてみる。

(i) (M, g) : Riemannian manifold

$\Omega \subset M$: 十分小さな領域

ならば、 $\phi: \Omega \rightarrow (N, h)$: harmonic に対し

$$\text{Ind}_\Omega(\phi) = \text{Null}_\Omega(\phi) = 0$$

であるか？

(ii) $\phi: \Omega \rightarrow (N, h)$: harmonic に対し、 $\text{Ind}_\Omega(\phi)$ 、 $\text{Null}_\Omega(\phi)$ は (N, h) の断面曲率と energy

$$E_\Omega(\phi) = \int_\Omega e(\phi) dv_g$$

で評価できるか。

(浦川-harmonic map)

▼ ϕ : isometric minimal immersion の場合に対応する (i) の問題に対しては、
[B.D], [H], [Mo], [Tan], [Ko] の結果が知られている。

▼ 更に、上の comparison theorem が調和写像の場合に拡張できないか？ という問題も考えられる。

▼ もし、粗い評価で良ければ、(i), (ii) は次の § 3 のようにして遂行できる。

§ 3 The heat equation method due to Berard and Gallot and its application

▼この§では、

(M, g) : compact Riemannian manifold

E : vector bundle over (M, g) with fiber metric $\langle \cdot, \cdot \rangle$

∇ : compatible connection for E

i.e. $\langle \nabla_X s_1, s_2 \rangle = \langle \nabla_X s_1, s_2 \rangle + \langle s_1, \nabla_X s_2 \rangle$

for $\forall s_1, s_2 \in \Gamma(E)$

として、§ 2 の問題をより一般的に、以下のように表される $\Gamma(E)$ 上の operator J にまで拡張して考察していく。

$$J = \Delta - R$$

但し

$$\Delta := - \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}) \quad \text{rough Laplacian}$$

$\{e_i\}_{i=1}^m$: local orthonormal frame of (M, g)

$R \in \Gamma(\text{Hom}(E, E))$ として、 R は $\forall s \in \Gamma(E)$ に対し、

$$(Rs)(x) = R_x(s(x)) \quad \text{for } \forall x \in M$$

と作用する。

例

上のように

$$J = \Delta - R$$

の形で表される operator には次のものがある。

(浦川-harmonic map)

(1) $A^p := M$ 上の C^∞ p -form 全体

として、

$\Delta := A^p$ に作用する Laplacian

(2) (1) の場合のうちで、 $A^0 = C^\infty(M)$ の場合。

つまり、普通の Laplacian Δ_0

$$\Delta_0 = \delta df = - \sum_{i=1}^n (e_i^2 - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}) f \quad \text{for } f \in C^\infty(M)$$

$\{e_i\}_{i=1}^n$: local orthonormal frame of (M, g)

(3) J_ϕ : harmonic map ϕ に対する Jacobi operator

(4) $\bar{\Delta}$: rough Laplacian (i.e. $R \equiv 0$ の場合)

▼ M : compact で、 J 、特に上の (1) - (4) の例は elliptic であるから、 J 、 $\bar{\Delta}$ 、 Δ_0 の spectrum は discrete である。 J 、 $\bar{\Delta}$ 、 Δ_0 のそれぞれに対応する固有値を重複度を込めて

$$\begin{aligned} J &\rightarrow \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_i \dots \\ \bar{\Delta} &\rightarrow \bar{\lambda}_1 \leq \bar{\lambda}_2 \leq \dots \leq \bar{\lambda}_i \dots \\ \Delta_0 &\rightarrow 0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \end{aligned}$$

とおき、それらに対応する zeta functions を

$$\bar{Z}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\lambda_i}$$

$$\bar{Z}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\bar{\lambda}_i}$$

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\lambda_i}$$

とおく。

補題1

$$r = \max_{x \in M} \max_{\substack{s \in E_x \\ 0 \neq s}} \frac{\langle R_x s, s \rangle}{\langle s, s \rangle}$$

とおけば、

$$\bar{Z}(t) \leq e^{tr} Z(t) \quad (t > 0)$$

となる。

▼この補題は、Min-Max principle を用いて $\lambda_i \geq \bar{\lambda}_i - r$ を示すことにより、容易に証明される。

▼もう1つ補題を引用しておこう。

補題2 (Kato's inequality [H.S.U])

$$\bar{Z}(t) \leq p Z(t) \quad (t > 0)$$

$$p := \text{rank } E$$

▼この2つの補題を合わせる事により、次の命題がえられる。

命題 ([B.G])

$$(1) \quad \tilde{Z}(t) \leq p e^{tr} Z(t) \quad (t > 0)$$

$$(2) \quad J \text{ の非正の固有値の重複度の和 } \leq \tilde{Z}(t) \quad (t > 0)$$

証明

(1) 補題 1, 2 より明らか

(2)

$$\begin{aligned} \text{左辺} &\leq \sum_{\tilde{\lambda}_i \leq 0} e^{-t\tilde{\lambda}_i} \leq \sum_{\tilde{\lambda}_i \leq 0} e^{-t\tilde{\lambda}_i} + \sum_{\lambda_i > 0} e^{-t\tilde{\lambda}_i} \\ &= \tilde{Z}(t) \end{aligned}$$

q.e.d.

▼この命題には、いろいろ応用がある。例えば 1-form に作用する Laplacian Δ を考える。この時 Weitzenboeck formula より Δ は

$$\Delta = \bar{\Delta} + \rho$$

$\bar{\Delta}$: rough Laplacian

$$\rho(V) := - \sum_{i=1}^n R(e_i, V)e_i \quad \text{Ricci transformation}$$

という形をしている。(cf [E.L2] p11 (1.30) Theorem)

$$r_{\min} = \min_{x \in M} \min_{\substack{V \in T_x M \\ V \neq 0}} \frac{g(\rho(V), V)}{g(V, V)}$$

とおく。

(浦川-harmonic map)

$$Z(t) \rightarrow 1 \quad \text{as } t \rightarrow +\infty$$

であることに注意して

$$J = \Delta, \quad R = -\rho$$

に対して命題を適用すれば、次がえられる。

定理 (Bochner)

$$(i) \quad r_{\min} \geq 0 \Rightarrow b_1(M) \leq m = \dim M$$

$$(ii) \quad r_{\min} > 0 \Rightarrow b_1(M) = 0$$

▼証明は、Hodge Theorem と命題を組み合わせれば出来る。

(Hodge Theorem については、[Wa] Chapter 6 を見よ)

注意

$r_{\min} < 0$ の場合でも、 $b_1(M)$ を上から評価することが出来る。(cf. [B.G])

▼次に harmonic map の場合を考える。

(M, g) : compact Riemannian manifold

(N, h) : Riemannian manifold

$\phi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ harmonic

$$r_\phi = \max_{x \in M} \max_{\substack{V \in T_x M \\ V \neq 0 \\ y = \phi(x)}} \frac{h(\sum_{i=1}^m {}^N R(\phi \cdot e_i, V) \phi \cdot e_i, V)}{h(V, V)}$$

とすると、命題より、

(浦川-harmonic map)

$$\text{Ind}(\phi) + \text{Null}(\phi) \leq n e^{t \cdot r_\phi} Z(t) \quad (t > 0) \quad (\#)$$

$$n = \dim N = \phi^{-1}TN \text{ の fiber の次元}$$

となる。

r_ϕ は、 $\|K\| \leq a \quad (a > 0)$ のとき、

$$E^\infty(\phi) = \max_{x \in M} e(\phi)$$

とおけば、

$$r_\phi \leq 2aE^\infty(\phi)$$

と評価される。(簡単な計算である。)

これより (#) の式は、§2 の (ii) そのものではないが、それに近い結果を与えていることが分かる。

▼次に、[B.G] による命題を $\Omega \subset M$ bounded の場合に拡張する。

J, ∇, Δ は前と同様として

$\lambda_i(\Omega)$ は固有値問題

$$\begin{aligned} J V &= \lambda V & \text{in } \Omega \\ V &= 0 & \text{on } \partial \Omega \end{aligned}$$

の第 i 固有値とする。

$\lambda_i(\Omega)$ は固有値問題

$$\begin{aligned}\Delta V &= \lambda V && \text{in } \Omega \\ V &= 0 && \text{on } \partial \Omega\end{aligned}$$

の第 i 固有値とする。

$\lambda_i(\Omega)$ は固有値問題

$$\begin{aligned}\Delta V &= \lambda V && \text{in } \Omega \\ V &= 0 && \text{on } \partial \Omega\end{aligned}$$

の第 i 固有値として、（3つの場合とも0固有値は除いて考えている）

$$\tilde{Z}_\Omega(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\tilde{\lambda}_i(\Omega)}$$

$$\bar{Z}_\Omega(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\bar{\lambda}_i(\Omega)}$$

$$Z_\Omega(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\lambda_i(\Omega)}$$

$$r = \max_{x \in M} \max_{\substack{s \in E_x \\ 0 \neq s}} \frac{\langle R_x s, s \rangle}{\langle s, s \rangle}$$

とおく。このとき前と同様にして、次が成立する。

命題

- (1) $\tilde{Z}_\Omega(t) \leq \text{petr } Z_\Omega(t) \quad (t > 0)$
 (2) J の非正の固有値の重複度の和 $\leq \tilde{Z}_\Omega(t) \quad (t > 0)$

▼更に、

$$r_{\Omega, \phi} = \max_{x \in \bar{\Omega}} \max_{\substack{V \in T_x M \\ V \neq 0 \\ y = \phi(x)}} \frac{h(\sum_{i=1}^m {}^N R(\phi \cdot e_i, V) \phi \cdot e_i, V)}{h(V, V)}$$

とおくと、やはり前と同様にして次の命題が成立する。

命題

$$\phi: \Omega \rightarrow (N, h) \text{ harmonic}$$

に対し

$$\text{Ind}(\phi) + \text{Null}(\phi) \leq n e^{t \cdot r_{\Omega, \phi}} Z(t) \quad (t > 0) \quad (*)$$

$n = \dim N = \phi^{-1}TN$ の fiber の次元

▼このとき、 Δ の固有値問題の第1固有値の重複度は1である。即ち

$$0 < \lambda_1(\Omega) < \lambda_2(\Omega) \leq \dots$$

であるから、上の2つの命題を用いて次が言える。

定理

$$(i) \quad \lambda_1(\Omega) \geq r_{\Omega}, \phi \Rightarrow \text{Null}_{\Omega}(\phi) \leq n$$

$$\text{Ind}_{\Omega}(\phi) = 0$$

$$(ii) \quad \lambda_1(\Omega) > r_{\Omega}, \phi \Rightarrow \text{Null}_{\Omega}(\phi) = \text{Ind}_{\Omega}(\phi) = 0$$

よって特にこのとき ϕ は stable となる。

証明

(i) $\lambda_1(\Omega) \geq r_{\Omega}, \phi$ とせよ。このとき、 $\lambda_1(\Omega) < 0$ とすると、 $t \rightarrow \infty$ としたとき

$$Z_{\Omega}(t) \leq p e^{tr} Z_{\Omega}(t)$$

が成り立たなくなるので（右辺より左辺の方が早く大きくなる）、これは上の命題に矛盾する。よって $\lambda_1(\Omega) \geq 0$ となる。即ち、 $\text{Ind}_{\Omega}(\phi) = 0$ となる。後は (*) において、 $t \rightarrow \infty$ としてやれば、 $\lambda_1(\Omega) \geq r_{\Omega}, \phi$ より、(*) の右辺の極限は n 以下となり、左辺が t によらないことより結論が従う。

(ii) (*) において、 $t \rightarrow \infty$ としてやれば、 $\lambda_1(\Omega) > r_{\Omega}, \phi$ の仮定より、右辺が 0 に幾らでも近付くことより従う。

q.e.d.

▼更に、

$$\lambda_i(\Omega) \geq C(M, g) \cdot \text{Vol}(\Omega)^{-2/m} \cdot i^{-2/m}$$

$$i = 1, 2, \dots$$

という評価 (cf. [Y1] p 22) を使って、次を得る。

定理 ([U2])

$$\Omega \subset M^n \text{ bounded set}$$

$$\phi: \Omega \rightarrow (N, h) \text{ harmonic}$$

に対して、

$$\text{Ind}_{\Omega}(\phi) + \text{Null}_{\Omega}(\phi) \leq n \cdot \frac{\Gamma(\frac{m}{2} + 1) e^{m/2}}{(\frac{m}{2})^{m/2}} \cdot D^{m/2}$$

(浦川-harmonic map)

となる。但し、

$$D = r_{\Omega, \phi} \cdot C(M, g)^{-1} \cdot \text{Vol}(\Omega)^{2/m}$$

$$n = \dim N = \phi^{-1}TN \text{ の fiber の次元}$$

とおいた。

特に

$$\Omega \subset M = (\mathbb{R}^2, g_0) \quad g_0: \text{standard metric}$$

$$\exists a > 0 \text{ such that } NK \leq a$$

の場合には、

$$E^\infty(\Omega, \phi) = \max_{x \in \Omega} e(\phi)$$

とおけば、

$$\text{Ind}_\Omega(\phi) + \text{Null}_\Omega(\phi) \leq \frac{nea}{2\pi} \text{Area}(\Omega) E^\infty(\Omega, \phi)$$

となる。

▼この定理の“特に”の部分により、 Ω を十分小さくとれば、

$$\text{Ind}_\Omega(\phi) = \text{Null}_\Omega(\phi) = 0$$

である。よって、これは §2 (i) に対する 1 つの解答になっている。

▼上の定理は、最後の命題に λ_i の評価を代入し、適当な t をとることにより証明される。後半は $(M, g) = (\mathbb{R}^2, g_0)$ のときには、 λ_i の評価に出てくる定数が

$$C(\mathbb{R}^m, g_0) = 4\pi^2 \omega_m^{-2/m}$$

$$\omega_m = \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(\frac{m}{2} + 1)}$$

で与えられ、特に

$$C(\mathbb{R}^2, g_0) = 4\pi$$

となることより従う。

問題 0

定理中の $\text{Area}(\Omega)E^\infty(\Omega, \phi)$ を $E(\Omega, \phi)$ で置き換えられないだろうか。

Chapter 3 Stability of several harmonic maps

▼ §1 で compact Kaehler 多様体の間の holomorphic map は weakly stable であるという定理から導かれるいくつかの事柄を示す。そして、特に map の行き先が $P^n(\mathbb{C})$ である場合に、“weakly stable harmonic map は holomorphic か？”という問題に付いて考察する。

§2では、closed Riemannian manifold に対して、weakly stable, unstable という概念を定義して、Einstein manifold, homogeneous space の場合にその概念がどうなっているかの結果と、それらに関連した問題をいくつか紹介する。

§1 Weak stability about holomorphic maps

▼この § は定理などの引用が多いので、この § に限って、定理などに番号を付ける。

▼次の事は、良く知られている。

“compact Kaehler 多様体の間の holomorphic map は weakly stable である”
これを定理の形で述べると次のようになる。

定理(3.1.1) (Lichnerowicz [E.L2] Part I §8)

(i) (weak stability)

(M, g) : compact Kaehler manifold

(N, h) : Kaehler manifold

$\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ holomorphic

とせよ。この時、 ϕ はそれを含む homotopy class で energy minimizing である。すなわち、

$\forall \phi_t : \phi$ の smooth 1-parameter family with $\phi_0 = \phi$

に対し

$$E(\phi) \leq E(\phi_t) \quad \text{for } \forall t$$

となる。

(浦川-harmonic map)

(ii)(rigidity)

(i)の仮定に加え、

$$\phi_t: \text{harmonic for } \forall t$$

ならば

$$\phi_t: \text{holomorphic for } \forall t$$

となる。

注意

定理中で holomorphic を全て anti-holomorphic としても成り立つ。

▼この定理の無限小版も知られている。

定理 (3.1.2) ([S], [I], [U4])

(M, g) : compact Kaehler manifold

(N, h) : Kaehler manifold

$\phi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ holomorphic

とせよ。このとき、

$$\int_M h(J_\phi V, V) dv_\phi = \frac{1}{2} \int_M h(DV, DV) dv_\phi$$

となる。但し、 $V \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$ に対し $DV \in \Gamma(\phi^{-1}TN \otimes T^*M)$ を

$$DV(X) := \nabla_{JX} V - J \nabla_X V$$

∇ : connection induced from ${}^N \nabla$

J : almost complex structure on TM or on $\phi^{-1}TN$

(同じ記号で表す)

で定める。

(浦川-harmonic map)

▼この定理の証明はしない。

▼この定理(3.1.2)より、定理の仮定を満たす ϕ に対して

(1) ϕ は weakly stable である。

(2) $\text{Ker}(J_\phi) \cong H^0(\phi^{-1}TN)$

TN : holomorphic vector bundle of N

$H^0(\phi^{-1}TN)$: $\phi^{-1}TN$ の holomorphic section 全体

が成り立つ事が分かる。

上の (1), (2) の証明

(1) 積分の右辺の形より明らか。

(2) 定理(3.1.2) より

$$\text{Ker}(J_\phi) = \{V \in \Gamma(\phi^{-1}TN) \mid DV = 0\}$$

となる。(J_ϕ による固有空間分解を考えよ)

$$DV = 0 \Leftrightarrow \nabla_{JX} V = J \nabla_X V \quad \forall X \in \Gamma(TM)$$

よって $V \in \text{Ker}(J_\phi)$ に対し

$$V^- = \frac{1}{2} (V - \sqrt{-1} \cdot JV)$$

と置けば、 $V^- \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$ である。 N : Kaehler 多様体 であるから、
 J : complex structure が平行となるので V^- が holomorphic section になるこ
 とが分かる。この $\text{Ker}(J_\phi)$ から $H^0(\phi^{-1}TN)$ への対応は 1 対 1 であり、逆対

(浦川-harmonic map)

応も、同様にしてできるので、全射である事が分かり、結論が従う。

q.e.d.

▼これらの定理の応用を幾つか紹介しておこう。

系(3.1.3)

(M, g) : compact Kaehler manifold

とすると、 $\text{id}: (M, g) \rightarrow (M, g)$ 恒等写像 は weakly stable である。

このとき、Jacobi operator は

$$J_{\text{id}} = \Delta - \rho$$

Δ : rough Laplacian

ρ : Ricci transformation

であり、このとき

$$\text{Ker}(J_{\text{id}}) \cong A(M)$$

$A(M)$: holomorphic vector fields on M 全体

となる。

▼これは、Lichnerowicz によって既に示されている。(cf. [Li](5.2.89))

証明は定理(3.1.2)に当てはめれば、すぐ得られる。

▼もう1つ定理(3.1.2)の応用をあげておく。

系(3.1.4) (Obata [U2])

(M, g) : compact Kaehler manifold

$$\text{Ric}_M \geq \alpha > 0$$

(浦川-harmonic map)

とせよ。このとき

$$\lambda_1(M, g) \geq 2\alpha \quad \lambda_1(M, g): \text{Laplacian の non-zero 第1固有値}$$

となる。更にここで等号が成立すれば、 $A(M) \neq 0$ となる。

証明

$$\Delta f = \lambda_1(M, g)f$$

となる $f \neq 0$ をとり

$$V = \text{grad } f$$

とおく。

$$b: TM \rightarrow T^*M$$

$$\#: T^*M \rightarrow TM$$

を canonical bundle isomorphism とする。(musical isomorphism と言う cf. [E.L2] p4)。これらは connection preserving な bundle map である。

$$df = V^\flat$$

である。Weitzenboeck formula (cf. [E.L2] (1.30)) より

$$\Delta df = - \text{trace } \nabla^2 df - \sum_{i=1}^m (R(e_i, \cdot)df)(e_i)$$

$$= - \text{trace } \nabla^2 df + \sum_{i=1}^m df(\nabla R(e_i, \cdot)e_i)$$

$R, \nabla R$: curvature of T^*M and TM respectively

一方、

$$\Delta df = d\Delta f = \lambda_1 df$$

(浦川-harmonic map)

であるから、

$$\begin{aligned}
 -\lambda_1 V^b &= -\operatorname{trace} \nabla^2 V^b + \sum_{i=1}^m V^b ({}^n R(e_i, \cdot) e_i) \\
 &= -(\operatorname{trace} \nabla^2 V)^b + \sum_{i=1}^m g({}^n R(e_i, \cdot) e_i, V) \\
 &= -(\operatorname{trace} \nabla^2 V)^b + \sum_{i=1}^m g({}^n R(e_i, V) e_i, \cdot) \\
 &= -(\bar{\Delta} V)^b + \sum_{i=1}^m ({}^n R(e_i, V) e_i)^b
 \end{aligned}$$

$$\therefore \lambda_1 V = \bar{\Delta} V + \rho(V)$$

$$\bar{\Delta} V = \lambda_1 V - \rho(V)$$

一方、系(3.1.3) より $\operatorname{id}: M \rightarrow M$ が weakly stable であるから、

$$0 \leq \int_M \langle J_{\operatorname{id}} V, V \rangle dv_g = \int_M \langle \bar{\Delta} V - \rho(V), V \rangle dv_g$$

$$= \int_M \langle \lambda_1 V - 2\rho(V), V \rangle dv_g$$

$$\leq (\lambda_1 - 2\alpha) \int_M \langle V, V \rangle dv_g$$

$V = \operatorname{grad} f \neq 0$ であるから、

$$\lambda_1 - 2\alpha \geq 0$$

となる。この式で等号が成立すれば、

$$\int_M \langle J_{\operatorname{id}} V, V \rangle dv_g = 0$$

となるので、 $0 \neq V \in A(M)$ となる。

q.e.d.

▼ $(M, g), (N, h)$: compact Kaehler manifolds

$$\phi : (M, g) \rightarrow (N, h) \text{ harmonic}$$

この設定の下で、今までやったことと逆の問題を考える。

問題 1

(イ) ϕ が weakly stable

(ロ) ϕ は、その homotopy class で energy minimizing

この (イ) 又は (ロ) がなりたつとせよ。このとき ϕ は holomorphic 又は、anti-holomorphic か?

▼しかし、これは一般には成立しない。ここでその反例を与えておく。

例 1 ([L.S])

$$(M, g) = (P^1(\mathbb{C}), g_0) \quad g_0: \text{Fubini-Study metric}$$

$$(N, h) = (P^1(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C}), g_0 \times g_0)$$

とする。

$$\sigma : P^1(\mathbb{C}) \rightarrow P^1(\mathbb{C})$$

を、 $P^1(\mathbb{C})$ を round sphere と思った時の anti-podal map とせよ。そして

$$\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$$

$$\phi(x) = (x, \sigma(x))$$

とおく。このとき

Claim ϕ : energy minimizing

(\because)

$$\psi : (M, g) \rightarrow (N, h)$$

$$\psi(x) = (x, x)$$

と定めれば、 ψ は holomorphic だから energy minimizing である。

$$\Phi : (N, h) \rightarrow (N, h)$$

$$\Phi(x, y) = (x, \sigma(y))$$

とすれば、 Φ は isometry である。よって、 $\phi = \Phi \circ \psi$ は energy minimizing である。

q.e.d.

(浦川-harmonic map)

ところが、 ϕ は明らかに \pm holomorphic (i.e. holomorphic or anti-holomorphic) ではない。

▼以下、 g_0 : Fubini-Study metric of $P^n(\mathbb{C})$ とする。

▼問題 1 には反例があったが、次は成立すると思われていた。

問題 2 ([E.L2] p69 (3.4))

(M, g) : compact Kaehler manifold

$\phi: (M, g) \rightarrow (P^n(\mathbb{C}), g_0)$ weakly stable harmonic map

ならば、 ϕ は \pm holomorphic か?

▼これが成立すると思われていた理由は、次の定理にあった。

定理 ([L.S])

$(P^n(\mathbb{C}), g_0)$ の stable な minimal submanifold は complex manifold である。

(但し、ここでの stable は area functional についてである。)

▼だが、問題 2 にも反例がある。

例 2

$\Phi: P^1(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C}) \rightarrow P^3(\mathbb{C})$ Segre imbedding

$([z_0, z_1], [w_0, w_1]) \mapsto [z_0 w_0, z_0 w_1, z_1 w_0, z_1 w_1]$

とする。これは holomorphic であるから、energy minimizing である。故に

$\phi: P^1(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C}) \rightarrow P^3(\mathbb{C})$

$\phi = \Phi \circ (\text{id} \times \sigma)$

(浦川-harmonic map)

とすれば、 ϕ は energy minimizing ではあるが \pm holomorphic ではない。

▼しかしある場合には、問題 1、2 が肯定的に解決されたり、問題 1、2 に近いことが言えたりしている。以下、それに関する結果を幾つか挙げる。

定理 ([X], [Siu])

$$\phi : (S^2, g) \rightarrow (P^n(\mathbb{C}), g_0) \text{ weakly stable harmonic map}$$

ならば、 ϕ は \pm holomorphic である。

注意

(S^2, g) の g は、任意の Riemannian metric でよい。

$((S^2, g)$ からの写像が weakly stable であることや、 \pm holomorphic であるは、conformal diffeo では変わらない性質であり、 S^2 上の metric は互いに、conformal diffeo で移り合うことに注意せよ。)

▼その他の結果を述べるため、次の定義をする。

定義

(M, g) : compact kaehler manifold

(N, h) : Riemann manifold

に対し

$$\phi : (M, g) \rightarrow (N, h) \text{ pluri-harmonic}$$

$$\Leftrightarrow \alpha(X, Y) + \alpha(JX, JY) = 0$$

$$\text{for } \forall X, Y \in T_x M, x \in M$$

但し、

J : complex structure of M

(浦川-harmonic map)

$$\alpha(X^-, Y^-) = \nabla_{X^-} \phi \cdot (Y^-) - \phi \cdot (\nabla_{X^-} Y^-)$$

$$\text{for } X^-, Y^- \in \Gamma(TM)$$

: ϕ に関する第 2 基本形式

$\nabla :=$ the connection on $\phi^{-1}TN$ induced from ${}^N\nabla$

$\nabla :=$ the Levi-Civita connection of M

▼ pluri-harmonic map に関するいくつかの性質を述べる。証明は容易である。

(1) ϕ : pluri-harmonic $\Rightarrow \phi$: harmonic

(2) (N, h) : compact Kaehler manifold

$\phi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ holomorphic

$\Rightarrow \phi$: pluri-harmonic

(3) $\dim_{\mathbb{C}} M = 1$ ならば、全ての harmonic map は pluri-harmonic である。

(4) (M, g) : compact kaehler manifold

(M', g') : compact complex manifold

(N, h) : Riemannian manifold

$\phi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ pluri-harmonic

$\psi: (M', g') \rightarrow (M, g)$ holomorphic

\Rightarrow

$\phi \circ \psi: (M', g') \rightarrow (N, h)$ pluri-harmonic

▼ 問題 1、2 に関連して、最近、大仁田氏によって示されたのは次の定理である。

定理 (Ohnita [Oh2])

(N, h) : Riemannian manifold

$\phi: (P^n(\mathbb{C}), g_0) \rightarrow (N, h)$ weakly stable harmonic map

$\Rightarrow \phi$: pluri-harmonic

(浦川-harmonic map)

▼ 次の結果も最近のものである。

系 (Bando, Ohnita [Oh2])

$$\begin{aligned} \phi : (P^n(\mathbb{C}), g_0) &\rightarrow (P^n(\mathbb{C}), g_0) \text{ weakly stable harmonic map} \\ \Rightarrow \phi &: \pm \text{holomorphic} \end{aligned}$$

注意 1

大仁田氏の定理は 写像の定義域である $(P^n(\mathbb{C}), g_0)$ を $\text{rank} \geq 2$ の対称空間に置き換えられない。(例 2 が反例になっている。)

注意 2

坂東、大仁田氏の系について、仮定が *minimal isometric immersion* の場合は宇田川氏によって得られていた。

§ 2 Weak stability about Einstein manifolds

▼この§では、closed Riemannian manifold に対して、weakly stable, unstable という概念を定義して、Einstein manifold, homogeneous space の場合にその概念がどうなっているかの結果と、それらに関連した問題をいくつか紹介する。

▼以下 (M, g) : closed Riemann 多様体 とする。

$$\text{id}: (M, g) \rightarrow (M, g) \quad \text{identity map}$$

は harmonic map であり、その Jacobi operator は

$$J_{\text{id}} = \Delta - \rho: \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

であった (see Chapter 3 § 1 p34)。次の定義は、長野正氏による。

定義

(1) (M, g) : weakly stable

$\Leftrightarrow \text{id}: (M, g) \rightarrow (M, g)$ identity map が harmonic map として weakly stable である。

(2) (M, g) : unstable

$\Leftrightarrow (M, g)$ が weakly stable でない。

記号

(1) $\mathcal{M} :=$ the isometry classes of all compact Riemannian manifolds

(2) $\mathcal{M}_s := \{[(M, g)] \in \mathcal{M} \mid (M, g): \text{weakly stable}\}$

(3) $\mathcal{M}_u := \{[(M, g)] \in \mathcal{M} \mid (M, g): \text{unstable}\}$

▼ここで

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_s \cup \mathcal{M}_u \quad (\text{disjoint union})$$

である。次の問題について考察する。

(浦川-harmonic map)

問題 3

\mathcal{M}_s 又は \mathcal{M}_u を決定せよ。

▼今までに、この問題に関して分かっている事を述べると

- (i) 定義より \mathcal{M}_u は \mathcal{M} の適当な位相に関し開集合である。
(例えば、 C^∞ -topology に関して開集合である。)
- (ii) $\{[(M, g)] \in \mathcal{M} \mid (M, g): \text{Kaehler}\} \subset \mathcal{M}_s$
(Chapter 3 §3 の定理(3.1.1)を見よ)
- (iii) $\{[(M, g)] \in \mathcal{M} \mid \text{Ric} \leq 0\} \subset \mathcal{M}_s$
(これは、 J_{id} の形より明らか)

▼しかし、 \mathcal{M} 全体で考えるのは難しいので、対象を Einstein manifold に制限して問題を考えてみる。その場合、次の結果が知られている。

定理 (R.T.Smith [Sm 2])

(M, g) : compact Einstein manifold with Einstein constant α
(i.e. $\rho = \alpha g$)

このとき、次の(i)、(ii)が成立する。

- (i) (M, g) : weakly stable
 $\Leftrightarrow \lambda_1(M, g) \geq 2\alpha$
 $\lambda_1(M, g)$: the first non-zero eigenvalue of Laplacian
- (ii) $\text{Null}(id) = \dim \text{Ker}(J_{id})$
 $= \dim i(M, g) + m(2\alpha)$
 $i(M, g) := \{X \in \Gamma(TM) \mid \text{Killing vector field}\}$
 $m(2\alpha) := \dim \{f \in C^\infty(M) \mid \Delta f = 2\alpha f\}$

▼対称空間については、次のことが知られている。

(浦川-harmonic map)

命題 ([Oh1], [U1])

(M, g) : connected and simply connected isotropy irreducible
compact Riemannian symmetric space

このような (M, g) は、常に Einstein である。このとき、 (M, g) に対し次が
成り立つ

(M, g) : unstable $\Leftrightarrow (M, g)$ は次のいずれかである。

- (1) S^n ($n \geq 3$)
- (2) $G_{p,q}(H) = Sp(p+q)/Sp(p) \times Sp(q)$
($p \geq q \geq 1$)
- (3) $P^2(\text{Cay}) = F_4/Spin(9)$
- (4) E_6/F_4
- (5) $SU(2p+2)/Sp(p+1)$ ($p \geq 2$)
- (6) $SU(p+1)$ ($p \geq 2$)
- (7) $Sp(p)$ ($p \geq 2$)

定理 (Ohnita [Oh1])

(M, g) : isotropy irreducible compact symmetric space

とせよ。このとき、次の3つは同値である。

- (i) (M, g) : unstable
- (ii) $\forall (N, h)$: Riemannian manifold
 $\forall \phi: (M, g) \rightarrow (N, h)$: non-constant harmonic map
を持ってきたとき、 ϕ は unstable である。
- (iii) $\forall (M', g')$: Riemannian manifold
 $\forall \psi: (M', g') \rightarrow (M, g)$: non-constant harmonic map
を持ってきたとき、 ψ は unstable である。

▼最後に幾つか問題をあげておく。

(浦川-harmonic map)

問題 4

isotropy irreducible compact homogeneous Riemannian manifolds を stable なものと unstable なものに分類せよ。

注意

この様な Riemannian manifold は Wolf によって完全に分類されている。

(cf. [W1], [W2])

問題 4 の多様体の中で、symmetric ではない unstable manifold が見つけれれば、大変面白いと思う。

▼ isotropy 表現が reducible のときには、次の Ziller による結果が有る事を注意しておこう。(cf. [Z])

“ $\exists g: S^{4n+3} = Sp(n+1)/Sp(n)$ 上の homogeneous 計量
such that

(i) S^{4n+3} 上の canonical metric とは isometric ではない。

(ii) $id: (S^{4n+3}, g) \rightarrow (S^{4n+3}, g)$ unstable”

(Matsuzawa による結果 ([M]) を使って、この Einstein 計量が unstable であることが確かめられる。)

問題 5 (Lawson-Simons [L.S])

(M, g) : compact Riemannian manifold

$$\frac{1}{4} < \kappa \leq 1 \quad (\text{i.e. } M: \frac{1}{4}\text{-pinched})$$

ならば、

$\forall (M', g'), \forall (N, h)$: Riemann manifolds

$\forall \psi: (M', g') \rightarrow (M, g)$: non-constant harmonic map

$\forall \phi: (M, g) \rightarrow (N, h)$: non-constant harmonic map

を持ってきたとき、 ψ や ϕ は unstable であるか。

(浦川-harmonic map)

注意 The Sphere Theorem により、問題 5 の 仮定を満たす (M, g) の universal covering は球面に homeo である。(The Sphere Theorem に付いては、[K1] Theorem 2.8.5 をみよ。)

▼これに対する部分的回答は Aminov, Kawai, Howard らによって得られている。
(cf. [A], [How], [K])

▼最後に、講演後の J.L.Kazdan 氏の質問を問題として述べておく

問題 6

M : compact manifold

で、

$\exists g_1, g_2$: Riemannian metrics on M

such that (M, g_1) : stable

(M, g_2) : unstable

となるような M が存在するか?

すなわち、unstable, stable の概念は diffeo で不変か?

Chapter 4 Constructions and classification problems of harmonic mappings

▼この章では、harmonic map を具体的に構成することや、harmonic map を parametrize することに関して考察する。

§1 Eigenmaps into spheres

▼harmonic map の構成に関して基本的なのは次の定理である。

定理 (Eells-Sampson [E.S])

$(M, g), (N, h)$: compact Riemann manifolds

$${}^N K \leq 0$$

とせよ。このとき

$\forall \psi : M \rightarrow N$ smooth map

$\exists \phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ harmonic map

such that (i) $\phi \in [\psi]$ ($[\psi]$: ψ を含む homotopy class)

(ii) ϕ は、 $[\psi]$ で energy minimizing

▼ある熱方程式を解くことにより、定理にある ϕ の存在がいえる。

▼ (N, h) の曲率の条件が無い場合、次のような問題がある。

問題 7 ([Y2] No.112)

(S^n, g) : standard unit sphere

$\pi_i(S^n) = [S^i, S^n]$: S^n の i -th homotopy 群

とする。このとき、 $\pi_i(S^n)$ の各元を

$\phi : S^i \rightarrow S^n$ harmonic

で代表することができるか。

(浦川-harmonic map)

▼更に次のような問題も考えられる。

問題 8 (Eells)

(S^1, g) から (S^n, g) への全ての harmonic map を分類せよ。

▼問題 7 に関しては、次の R.T. Smith の結果がある。

“ $n \leq 7$ ならば、 $\pi_n(S^n)$ の任意の元は、harmonic map で代表する事ができる。”

問題 7、8 に attack するには、次の結果が、essential である。

定理 (Takahashi [T], [T.D])

(M', g') : Riemann manifold

(S^n, g) : standard sphere in \mathbb{R}^{n+1}

として、 $i: (S^n, g) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ をその imbedding とする。

この時、

$\forall \phi: (M', g') \rightarrow (S^n, g)$ smooth map

に対し

$\Phi(x) := i \circ \phi(x) = (\Phi_0(x), \Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x))$

とおけば、

ϕ : harmonic

\Leftrightarrow

$\Delta \Phi_i = 2e(\phi) \Phi_i \quad i = 0, 1, \dots, n$

但し Δ : Laplacian of (M', g')

▼ ϕ が harmonic であることと同値である次の式

$$\tau(\phi) = 0$$

を計算すれば、定理の式が得られる。

(浦川-harmonic map)

▼この定理より、 $\phi : (M', g') \rightarrow (S^n, g)$ harmonic が与えられたとき、次の2つの場合に分けることが意味を持つ。

(i) $e(\phi) : \text{constant on } M'$

(ii) $e(\phi) : \text{non-constant on } M'$

以下このノートでは、(i) の場合を考える。

((ii) の場合には、[Sm1] に部分的結果がある。)

(i) を満たす harmonic map $\phi : (M', g') \rightarrow (S^n, g)$ を eigenmap と呼ぶ。

この時 ϕ は、 Δ の固有値 $2e(\phi)$ の固有関数である。更に次の定理が知られている。(定理に出てくる言葉を、定理の後に定義した。)

定理 (do Carmo - Wallach [D.W], D'Ambra - G.Toth [T.D])

$(M', g') : \text{isotropy irreducible compact oriented}$

$\text{homogeneous Riemannian manifold}$

$(S^n, g) : n\text{-dimensional standard sphere}$

この時

(1) $\phi : (M', g') \rightarrow (S^n, g)$ harmonic with constant energy density (i.e. $e(\phi) \equiv \text{constant on } M'$)

ならば、 (M', g') の Laplacian のある固有値 λ_k に対して、

$$2e(\phi) = \lambda_k$$

である。

(2) $\lambda_k : \Delta$ の固有値 を1つ固定する。

このとき、

$$\{ \phi : (M', g') \rightarrow (S^n, g) \mid \text{full, harmonic, } 2e(\phi) \equiv \lambda_k \}$$

$n : \text{自然数}$

は finite dimensional vector space の compact convex body

L_k で parametrize される。

(n も動くことに注意せよ)

▼上の定理の(2)で出てきた言葉の定義をする。

定義

$\phi: M' \rightarrow S^n$ smooth が full である

\Leftrightarrow

S' : hypersphere of (S^n, g)

(i.e. totally geodesic $(n-1)$ -dimensional sphere)

で、

$$\phi(M') \subset S'$$

となる S' が存在しない。

定義

$M' = G/K$, λ_k : as in the theorem

$$V_k := \{f \in C^\infty(M') \mid \Delta f = \lambda_k f\}$$

とする。($\dim V_k < \infty$ であることに注意せよ。)

$v_0 \in V_k$ such that

$$s \cdot v_0 = v_0 \quad \text{for } \forall s \in K$$

$$\|v_0\| = 1$$

但し

$$s \cdot v_0(x) = v_0(sx) \quad \text{for } \forall x \in M', \forall s \in G$$

$\|\cdot\|$: L^2 -norm

(この様な v_0 は必ず存在する。)

となる v_0 を固定して、次のように定義する。

$S^2(V_k)$: symmetric square of V_k

v_0^2 : symmetric square of v_0

$$W_k := \{c \in S^2(V_k) \mid c \perp g \cdot v_0^2 \text{ for } \forall g \in G\}$$

$$L_k := \{c \in W_k \mid c + I \geq 0\}$$

(浦川-harmonic map)

但し

$I \in S^2(V_k)$: identity element

\perp : L^2 -norm に関する直交

(L_k は W_k の convex body になっており、 $\dim W_k < \infty$ である。)

▼ 1 つコメントしておく、どの様な λ_k : k -th eigenvalue of Δ ($k \geq 1$) に対して $\dim W_k > 0$ となるか、という問題は、調和写像の剛性に関連して興味ある問題である。

(定理より、 $\dim W_k > 0$ であれば、定理の仮定を満たす $2e(\phi) = \lambda_k$ なる full harmonic map は $L_k \neq \{0\}$ で parametrize され、infinitesimally rigid ではない。)

(cf. [U5])

§ 2 Non-linear σ -models

▼ $\dim M = 2$ の場合の harmonic map の存在については、次の定理が良く知られている。

定理 (Sacks - Uhlenbeck [S.U])

(M, g) : closed Riemannian manifold, $\dim M = 2$

(N, h) : Riemannian manifold, $\pi_2(N) = \{0\}$

とする。この時

$\forall \psi : M \rightarrow N$ smooth map

$\exists \phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ harmonic

such that

(i) $\phi \in [\psi]$ ($[\psi]$: ψ を含む homotopy class)

(ii) ϕ は、 $[\psi]$ で energy minimizing

▼ 以下 $(M, g) = (S^2, g)$: standard 2-sphere として考える。

(i) Calabi constructions $S^2 \rightarrow S^n$

▼ Calabi の定理を紹介するために、notation 等を決めておく。

先ず

$$I_p = SO(2p+1)/U(p)$$

とおく。 I_p は、 \mathbb{C}^{2p+1} 内の p 次元 isotropic subspaces 全体の成す空間と同一視される。そして I_p には hermite 対称空間としての metric を入れておく。このとき、 I_p には compact Kaehler manifold の構造が入る。

(浦川-harmonic map)

$$\pi : I_0 \rightarrow S^{2p} = SO(2p+1) / SO(2p)$$

を、自然な包含射像

$$U(p) \rightarrow SO(2p) : X + \sqrt{-1} Y \mapsto \begin{bmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{bmatrix}$$

$$X, Y \in M(n, \mathbb{R})$$

から誘導される射影とする。

これは Riemannian submersion となっている。(cf. [N])

(M', g') : Riemannian manifold としたとき

$\psi : (M', g') \rightarrow I_0$ が horizontal である。

$$\Leftrightarrow \psi_*(T_x M') \subset H_{\psi(x)} \quad \text{for } x \in M'$$

但し、 H_y : Horizontal space of Riemannian submersion π
for $y \in I_0$.

ときめる。

定理 (Calabi [C1], [C2])

$$\phi : (S^2, g) \rightarrow (S^n, g): \text{full harmonic}$$

このとき、次の2つが成立する。

$$(i) \quad n = 2p \quad (\text{i.e. } n: \text{even})$$

$$(ii) \quad \exists \psi : (S^2, g) \rightarrow I_0 \quad \text{holomorphic horizontal map} \\ \text{such that } \phi = \pi \circ \psi$$

▼証明については、[L] Proposition 1.2, Theorem 3.8 を見よ。

▼次の問題をあげておこう。

問題 9 (Verdier [V])

S^2 から I_0 への全ての holomorphic horizontal map を求めよ。

(ii) Twistor constructions $S^2 \rightarrow P^n(\mathbb{C})$

▼これに関しては、定理を1つあげておく。並んでいる名前の内、最初の4人は物理学者で、後の3人が幾何学者である。

定理 (Din-Zakrewski, Glasev-Stora, Burns-Eells-Wood [E.W])

次の2つの集合の間には1対1対応がある。

$$\begin{aligned} & \{ \phi \mid (S^2, g) \rightarrow (P^n(\mathbb{C}), g_0) \text{ full, harmonic} \} \\ \Leftrightarrow & \{ (f, r) \mid f: S^2 \rightarrow P^n(\mathbb{C}) \text{ full, holomorphic} \\ & 0 \leq r \leq n \text{ integer} \} \\ & (g_0: \text{Fubini-Study metric}) \end{aligned}$$

(iii) Chiral fields $S^2 \rightarrow U(n)$

$$\nabla \quad U(n) := \{ X \in M(n, \mathbb{C}) \mid {}^t X \cdot X = I \}$$

として、 $U(n)$ 上に

$$\langle X, Y \rangle := \text{Trace} (X \cdot {}^t Y)$$

$$\text{for } X, Y \in u(n) = \{ X \in M(n, \mathbb{C}) \mid {}^t X + X = 0 \}$$

より誘導される両側不変な metric $h(,)$ を入れておく。

$$g_0 = dx^2 + dy^2 \quad \text{metric on } \mathbb{R}^2$$

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{bounded}$$

(浦川-harmonic map)

とする。このとき、 $\phi : (\Omega, g_0) \rightarrow (U(n), h)$ の energy は

$$E(\phi, \Omega) = \int \int_{\Omega} \left\{ \left| \phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|^2 + \left| \phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|^2 \right\} dx dy$$

但し $\partial \phi / \partial x$ は行列を成分毎に微分したもの

$| \quad |$ は h で定まる norm

と表される。この式より第一変分を計算して、

$$\phi : (\Omega, g_0) \rightarrow (U(n), h) \text{ smooth}$$

が harmonic map である。

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0 \text{ on } \Omega \quad (*)$$

ということが分かる。次の補題は、 (S^2, g) から $(U(n), h)$ への harmonic map の分類は、 (R^2, g_0) から $(U(n), h)$ への harmonic map の分類に帰結される事を示している。証明には、Sacks-Uhlenbeck の結果 ([S.U] Theorem 3.6) を用いる。

補題

$$\forall \phi : (R^2, g_0) \rightarrow (U(n), h) \text{ smooth}$$

が、(*)を満たし

$$E(\phi, R^2) < \infty$$

であれば、 ϕ は (S^2, g) から $(U(n), h)$ への harmonic map へ、 (S^2, g) から (R^2, g_0) への立体射影を通じて、一意に拡張される。逆に

$$\phi : (S^2, g) \rightarrow (U(n), h) \text{ harmonic}$$

が与えられた時に

(浦川-harmonic map)

$\mu : (\mathbb{R}^2, g_0) \rightarrow (S^2, g)$ inverse of stereographic projection

とすれば、 μ は conformal だから

$\phi \circ \mu : (\mathbb{R}^2, g_0) \rightarrow (U(n), h)$ harmonic

となる。

▼ここで

$$A_x = \phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad A_y = \phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (\star)$$

とおけば、 A_x, A_y は $u(n)$ -valued function on Ω となる。

そして、(*) は次の形となる。

$$\frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y = 0 \quad \text{on } \Omega \quad (**)$$

更に、この微分方程式(**)の積分可能条件は

$$\frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x + [A_x, A_y] = 0 \quad (***)$$

となる。このとき、次のことが分かる。(cf. [Yo] § 61)

“ $\forall A_x, \forall A_y : u(n)$ -valued functions on Ω satisfying (**), (***)

ならば、任意に与えられた $(x_0, y_0) \in \Omega, U_0 \in U(n)$ に対して、

$\exists \phi : (\Omega, g_0) \rightarrow (U(n), h)$ harmonic

such that

$$\phi(x_0, y_0) = U_0$$

が存在して、 A_x, A_y は、 ϕ により (*) で表される。”

(浦川-harmonic map)

従って問題は (**), (***) を満たす A_x, A_y を求めることに帰着された.

▼ここで, 方程式 (**), (***) の幾何的意味について述べよう.

Ω 上の $u(n)$ 値 1 次微分形式 $A = A_x dx + A_y dy$ を考え, Ω 上の自明なベクトル束 $E = \Omega \times \mathbb{C}^n$ を考える. そこで E 上に次のような接続

$$\nabla = d + A$$

$$\text{i.e.} \quad \nabla_X \sigma = X\sigma + A(X)\sigma$$

$$\text{for } \sigma \in \Gamma(E), X \in \Gamma(T\Omega)$$

を与える. 但し, $A(X)\sigma$ は, $\Gamma(E) = \Omega$ 上の \mathbb{C}^n 値 \mathcal{C}^∞ 関数全体 とみなし $A(X)$ を行列として σ に作用させたものである.

さて, δ を (Ω, g_0) の余微分 (i.e. dual of exterior derivative) とすれば,

$$(**) \Leftrightarrow \delta A = 0$$

となっている.

他方, ∇ に対する curvature R を

$$R_{X,Y} = \nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y] \quad \text{for } X, Y \in \Gamma(T\Omega)$$

と定義したとき,

$$(***) \Leftrightarrow R = 0$$

i.e. ∇ は平坦な接続

(従って, 自明な Yang-Mills 接続である.)

となっている. (いづれも簡単な計算で確かめられる.)

(浦川-harmonic map)

注意

(**), (***) を満たす A_x, A_y は物理で chiral field と呼ばれているものである。この様な A_x, A_y を全て見いだすことは、大変面白い問題と思われる。これに関して、K.Uhlenbeck の興味あるプレプリントがあるが、まだ完全には解決されていない。

▼最後に問題を出しておこう。

問題 10

(S^2, g) から、Hermite 対称空間 (N, h) への harmonic map の表現を捜せ。
((i), (ii) のように、 (N, h) の適当な Twistor 空間を作り、Twistor construction せよ。)

注意

この問題に関しては、 (N, h) が複素グラスマン多様体の場合には、Burstall の結果 (cf. [B]) がある。また、Eells-Salamon の論文 (cf. [E.Sal]) も参考になる。

BIBLIOGRAPHY

- [A] J. A. Aminov, On the instability of minimal surfaces in an n -dimensional Riemannian space of positive curvature, Math. USSR Sb., 100(1976), 400-419
- [A.S] T. Adachi and T. Sunada, Energy spectrum of certain harmonic mappings, Compos. Math., 56(1985), 153-170
- [B] F. E. Burstall, A twistor description of harmonic maps of a 2-sphere into a Grassmannian, Math. Ann. 274(1986), 61-74
- [B.D] J. L. Barbosa and M. P. do Carmo, Stability of minimal surfaces and eigenvalues of the Laplacian, Math. Zeit., 173(1980), 13-28
- [B.G] P. Berard and S. Gallot, Inequalites isoperimetriques pour l'equation de la chaleur et application a l'estimation de quelques invariants, Seminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, No.15(1983)
- [C1] E. Calabi, Minimal immersions of surfaces in Euclidean spheres, J. Diff. Geom., 1(1967), 111-125
- [C2] E. Calabi, Quelques applications de l'analyse complexe aux surfaces d'aire minima, Topics in complex manifolds, Univ. Montreal, (1967), 59-81
- [D.W] M. P. do Carmo and N. R. Wallach, Minimal immersions of spheres into spheres, Ann. Math., 93(1971), 43-62
- [E.L1] J. Eells and L. Lemaire, A report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. 10(1978), 1-68
- [E.L2] J. Eells and L. Lemaire, Selected topics in harmonic maps, CBMS Reg. Conf. Series, No.50.(1983)
- [E.Sal] J. Eells and S. Salamon, Twistorial construction of harmonic maps of surfaces into four-manifolds, to appear in Ann. Scuola Norm. Pisa (1986)

- [E.S] J. Eells and J. H. Sampson, Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds, Amer. J. Math., 86(1964),109-160
- [E.W] J. Eells and J. C. Wood, Harmonic maps from surfaces to complex projective spaces, Adv. in Math., 49(1983),217-263
- [G.K.M] D. Gromoll, W. Klingenberg and W. Meyer, Riemannsche Geometrie im Grossen, Lecture Notes in Math. 55, Springer, New York, (1968)
- [Ht] P. Hartman, On Homotopic Harmonic Maps, Can. J. Math. 19 (1967),673-687
- [H] D. Hoffmann, Lower bounds of the first eigenvalue of the Laplacian of Riemannian submanifolds, Minimal submanifolds and geodesics, Kaigai Publ. (1978),61-73
- [How] R. Howard, The nonexistence of stable submanifolds, varifolds and harmonic maps in sufficiently pinched simply connected Riemannian manifold, Michigan Math. J. 32(1985),321-334
- [H.S.U] H. Hess, R. Schrader and D. A. Uhlenbrock, Kato's inequality and the spectral distribution of Laplacians on compact Riemannian manifolds, J. Differential Geom. 15(1980),27-37
- [I] T. Ishihara, The index of a holomorphic mapping and the index theorem, Proc. Amer. Math. Soc., 66(1977),169-174
- [K] S. Kawai, On the instability of a minimal surface in a 4-manifold whose curvature lies in the interval $(1/4,1]$, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ.,18(1982),1067-1075
- [K1] W. Klingenberg, Riemannian Geometry, Studies in Mathematics, Walter de Gruyter, (1982)
- [K.N] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential geometry, vol. I, Interscience, New York, (1963)
- [Ko] M. Koiso, On the stability of minimal surfaces in \mathbb{R}^3 , J. Math. Soc. Japan, 36(1984),523-541
- [L] H. B. Lawson, Surfaces minimales et la construction de Calabi-Penrose, Seminare Bourbaki, Asterisque, 121-122(1985)197-210

- [Li] A. Lichnerowicz, Geometrie des groupes de transformations, Dunod, (1958)
Geometry of groups of transformations, translated and edited by M. Cole, Noordhoff International Publishing, (1977)
- [L.S] H. B. Lawson and J. Simons, On stable currents and their application to global problems in real and complex geometry, Ann. Math., 98(1973)427-325
- [M] T. Matsuzawa, Einstein metrics and fibered Riemannian structures, Kodai Math. J., 6(1983),340-345
- [Mi] J. Milnor, Morse Theory, Ann. Math. Studies 51, Princeton Univ. Press, (1963)
- [Mo] H. Mori, Notes on the stability of minimal submanifolds of Riemannian manifolds, Yokohama Math. J. 25(1977),9-15
- [N] B. O'Neill, The fundamental equations for a submersion, Michigan Math. J. 13(1966),459-469
- [Oh1] Y. Ohnita, Stability of harmonic maps and standard minimal immersions, Tohoku Math. Journ.,38(1986),259-267
- [Oh2] Y. Ohnita, Pluriharmonicity of stable harmonic mappings, a preprint
- [S] T. Sunada, Holomorphic mappings into compact quotient of symmetric bounded domains, Nagoya Math. J., 64(1976),159-175
- [Siu] Y. T. Siu, Some remarks on the complex analyticity of harmonic maps, Southeast Asian Bull. Math., 3(1979),240-253
- [Sm1] R. T. Smith, Harmonic Mappings of Spheres, Amer. J. Math., 97(1975),364-385
- [Sm2] R. T. Smith, The second variation formula for harmonic mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 47(1975),229-236
- [S.U] J. Sacks and K. Uhlenbeck, The existence of minimal immersion of 2-Spheres, Ann. Math., 113(1981),1-24

- [T] T. Takahashi, Minimal immersions of Riemannian manifolds,
J. Math. Soc. Japan, 18(1966),380-385
- [Tan] S. Tanno, Remarks on Sobolev inequalities and stability of
minimal submanifolds, J. Math. Soc. Japan, 35(1983),323-329
- [T.D] G. Toth and G. D'Ambra, Parameter space for harmonic maps of
constant energy density into spheres, Geometriae Dedicata,
17(1984),61-67
- [U1] H. Urakawa, The first eigenvalue of the Laplacian for
a positively curved homogeneous Riemannian manifold, Compos. Math.
59(1986),57-71
- [U2] H. Urakawa, Stability of harmonic maps and eigenvalues of
Laplacian, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.
- [U3] H. Urakawa, Spectral geometry of the second variation operator
of Laplacian, a preprint
- [U4] H. Urakawa, Stability of harmonic maps and eigenvalues of
Laplacian, Lecture Note in Math. 1201, Curvature and Topology of
Riemannian Manifolds, Proceedings, Katata 1985, 285-307
- [U5] H. Urakawa, Minimal immersions of projective spaces into
spheres, Tsukuba J. Math., (1985)
- [V] J. L. Verdier, 2-dimensional σ -models and harmonic maps from
 S^2 to S^{2n} , Lecture Notes in Physics, Springer, 180(1982),136-141
- [Wa] F. Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie
Groups, Graduate Texts in Mathematics 94, Springer
- [W1] J. A. Wolf, The Geometry and structure of Isotropy irreducible
Homogeneous Spaces, Acta Math., 120(1968),59-148
- [W2] J. A. Wolf, Correction to The Geometry and Structure of
Isotropy Irreducible Homogeneous Spaces, Acta Math., 152(1984),
141-142
- [X] Y. L. Xin, On stable harmonic maps and their application,
Proc. Beijing Symp. Diff. Geom. Diff. Eq., 3(1980),1611-1619

- [Y1] S. T. Yau, Survey on partial differential equations in differential geometry, Ann. Math. Studies 102, Princeton, (1982), 3-71
- [Y2] S. Y. Yau, Problem section, Ann. Math. Studies 102, Princeton, (1982), 669-706
- [Yo] K. Yoshida, 微分方程式の解法 (第2版), 岩波書店, (1978)
- [Z] W. Ziller, Homogeneous Einstein metrics on spheres and projective spaces, Math. Ann., 59(1982), 351-358